1 Lineare Differenzialgleichungen (ein Beispiel)

Dipl.-Phys. Dr.-Ing. Ulrich Ruhnau Martinsried, den 6.7.2011

Die Gleichung $\boxed{y + y' = e^x}$ ist eine lineare Differenzialgleichung, weil auf der linken Seite eine Linearkombination von y und seinen Ableitungen steht. Die Koeffizienten dieser Linearkombination dürfen von x abhängig sein. Rechts dagegen steht nur eine beliebige Funktion von x. Man löst solche Gleichungen, indem man zuerst die jeweilige homogene Gleichung löst, d.h. $y_h + y'_h = 0$.

Lösung der homogenen Gl.	Lsg. der inhomogenen Gl.
$y_h + y_h' = 0$	$y_i + y_i' = e^x$
$\frac{dy_h}{dx} = -y_h$	Ansatz: Man wähle eine
$\int \frac{dy_y}{y_h} = -\int dx$	Funktion $a(x)$ so, daß
$ln \frac{y_h}{y_h 0} = -x$	gilt: $y_i(x) = a(x)y_h(x)$
$\frac{y_h}{y_{h0}} = e^{-x}$	$y_i' = a'y_h + ay_h'$
$y_h = y_{h0}e^{-x}$	$a'y_h + ay_a + ay_h' = e^x$
	$a'e^{-x} = e^x$
	$a' = e^{2x}$
	$a = \frac{1}{2}e^{2x}$
	$y_i = ay_h = \frac{1}{2}e^x$

Allgemeine Lösung: $\boxed{y = y_h + y_i = \frac{1}{2}e^x + y_{h0}e^{-x}}$

Die Konstante y_{h0} kann in der allgemeinen Lösung beliebig gewählt werden.